Coulomb-Korrekturen bei der inneren Bremsstrahlung

Inauguraldissertation
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

1963

vorgelegt von

Gerhard Felsner

aus Nürnberg

Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg
Würzburg 1963

1963 № 44

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 20. Februar 1963
Dekan: Universitätsprofessor Dr. H. Volz
Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr. H. Volz
Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr. H. Wegener

Sonderdruck aus: Zeitschrift für Physik, Band 174 (1963), Seite 43—56

Zeitschrift für Physik 174, 43–56 (1963)

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität Erlangen-Nürnberg

Coulomb-Korrekturen bei der inneren Bremsstrahlung*

Von

GERHARD FELSNER

Mit 4 Figuren im Text

(Eingegangen am 17. Januar 1963)

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Coulomb corrections to the internal Bremsstrahlung associated with allowed β-decay have been calculated. The Coulomb field is taken into account through the electron wave function. The corrections to the contributions of the intermediate states to the spectrum are evaluated. These corrections do not cancel out when the spectrum is normalized to the emission of one β-particle. Hence the corrections to the normalized spectrum are no longer small. The polarization is practically not affected by these Coulomb corrections. Numerical values for P^{32}, S^{35} and Y^{90} are compared with experimental results. Especially in the high energy part of the spectrum the former discrepancies between theory and experimental yield are removed.

I. Einführung

Beim β-Zerfall tritt neben dem Elektron-Antineutrino-Paar oft auch noch eine kontinuierliche γ-Strahlung auf, die innere Bremsstrahlung.

Anschaulich kann man sich den Mechanismus der inneren Bremsstrahlung etwa folgendermaßen vorstellen. Beim β-Zerfall tritt plötzlich eine Ladungsänderung am Kernort auf, da beim Zerfall eines Neutrons im Kern ein Proton zurückbleibt und ein Elektron wegfliegt. Das bedeutet aber, daß sich das Dipolmoment des Gesamtatoms plötzlich ändert, was wiederum das Auftreten einer elektromagnetischen Strahlung, eben der inneren Bremsstrahlung, zur Folge haben kann.

Experimentell gefunden wurde eine intensitätsschwache, niederenergetische, kontinuierliche γ-Strahlung beim β-Zerfall zuerst von ASTON[1] im Jahre 1927 bei Messungen am RaE.

Eine Theorie der inneren Bremsstrahlung wurde 1936 von KNIPP und UHLENBECK[2] und unabhängig davon auch von BLOCH[3] veröffentlicht. In dieser ersten Theorie, wir wollen sie KUB-Theorie nennen, wird die innere Bremsstrahlung in Bornscher Näherung berechnet. Man betrachtet den Zweistufenprozeß

$$n \Rightarrow p + e' + \bar{\nu} \Rightarrow p + e + \gamma + \bar{\nu}$$

* Herrn Professor Dr. RUDOLF FLEISCHMANN zum 60. Geburtstag gewidmet.

[1] ASTON, G.H.: Proc. Cambridge Phil. Soc. **23**, 935 (1927).

[2] KNIPP, J.K., u. G.E. UHLENBECK: Physica **3**, 425 (1936).

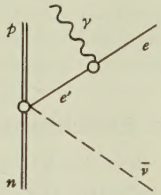
[3] BLOCH, F.: Phys. Rev. **50**, 272 (1936).

und berechnet die Aussendewahrscheinlichkeit $S(k)$ pro Zeiteinheit und Energieeinheit für ein γ-Quant der Energie k mit Störungsrechnung 2. Ordnung*. Im ersten Schritt geht der Anfangszustand $|0\rangle$ durch β-Zerfall über in den Zwischenzustand $|i\rangle$. Im zweiten Schritt wird beim Übergang von $|i\rangle$ zum Endzustand $|f\rangle$ ein γ-Quant ausgesandt. Um den Gesamtprozeß zu erhalten, muß über alle Zwischenzustände $|i\rangle$ summiert werden.

Man findet $S(k)$, wenn man das so erhaltene Gesamtmatrixelement quadriert und über die nicht beobachteten Größen aufsummiert bzw. integriert.

$$S(k) \sim \underset{\substack{\text{unbeobachtete} \\ \text{Größen}}}{\mathsf{S}} \left| \sum_i \frac{\langle f|H_\gamma|i\rangle\langle i|H_\beta|0\rangle}{E_0 - E_i} \right|^2 . \tag{1}$$

Die Bornsche Näherung besteht darin, daß für $|0\rangle$, $|i\rangle$ und $|f\rangle$ ebene Wellen eingesetzt werden. Man kann die KUB-Theorie mit Hilfe eines Feynman-Diagrammes darstellen.



KNIPP, UHLENBECK und BLOCH fanden im Fall eines erlaubten β-Zerfalls, daß sich die Wahrscheinlichkeit für die Aussendung eines γ-Quants der Energie k separieren läßt in die β-Zerfallswahrscheinlichkeit $P(E)$ und die Wahrscheinlichkeit für den elektromagnetischen Übergang $\Phi(E, k)$

$$S(k) \sim \int_1^{E_0 - k} P(E)\, \Phi(E, k)\, dE . \tag{2}$$

CHANG und FALKOFF[4] zeigten 1949 in Bornscher Näherung, daß diese Beziehung auch noch näherungsweise für einfach und zweifach verbotene β-Übergänge gilt.

Lange Zeit bestand Übereinstimmung zwischen Experiment und KUB-Theorie. Mit der Zeit wurden jedoch die experimentellen Methoden der γ-Spektroskopie verbessert; man verwendete insbesondere größere Szintillationskristalle, die eine größere Nachweiswahrscheinlichkeit für die γ-Quanten lieferten und eine genauere Energiebestimmung möglich machten. Es traten Diskrepanzen auf. So erschienen 1955 und 1956 experimentelle Arbeiten von LIDEN und STARFELT[5], STARFELT und

* Wir setzen $\hbar = m = c = 1$.

[4] CHANG, C. S. W., and D. L. FALKOFF: Phys. Rev. **76**, 365 (1949).

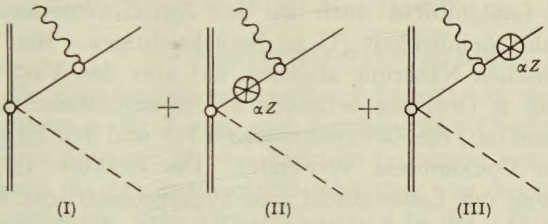
[5] LIDEN, K., and N. STARFELT: Phys. Rev. **97**, 419 (1955).

SVANTESSON[6] und LANGEVIN-JOLIOT[7], wo für P^{32} und S^{35} Spektren gefunden wurden, die eindeutig nicht mehr mit der KUB-Theorie übereinstimmten.

Es war naheliegend, die in der KUB-Theorie vernachlässigten Coulomb-Effekte für die Diskrepanzen verantwortlich zu machen. Das Einfachste, was man tun konnte, war, die für das β-Spektrum längst bekannten Coulomb-Korrekturen in (2) anzubringen. Man braucht dazu nur $P(E)$ mit dem Quadrat der relativistischen Coulombfeld-Wellenfunktion am Kernort, der Fermifunktion $F(Z, E)$, zu multiplizieren.

$$P(E)_{\text{Born}} \Rightarrow P(E)_{\text{Coul}} = F(Z, E)\, P(E)_{\text{Born}}. \tag{3}$$

Diese Korrektur wurde erstmalig von NILSSON[8] bei der inneren Bremsstrahlung angebracht. LEWIS und FORD[9] kamen 1956 auf einem fundamentaleren Weg zu demselben Ergebnis. Sie berechneten in Bornscher Näherung die folgenden Feynman-Diagramme:



(I) bedeutet Störungsrechnung 2. Ordnung und liefert die KUB-Theorie.

(II) bedeutet Störungsrechnung 3. Ordnung und liefert die Coulomb-Korrekturen zu $|i\rangle$ in (1). Der Beitrag von (II) verschwindet in Bornscher Näherung und 1. Ordnung von αZ.

(III) bedeutet Störungsrechnung 3. Ordnung und liefert die Coulomb-Korrekturen zum Endzustand $|f\rangle$ des Elektrons. Man erhält in Bornscher Näherung und 1. Ordnung von αZ das KUB-Ergebnis multipliziert mit $\pi\alpha Z E/(2p)$, so daß für das Spektrum (I)+(II)+(III) zusammen $(1+\pi\alpha Z E/p)$ mal das KUB-Ergebnis liefern; das ist aber nichts anderes als das Nilsson-Ergebnis (3) in 1. Ordnung von αZ.

Wenn die Coulomb-Effekte auf diese Weise berücksichtigt werden, so führt das nur zu einer sehr kleinen Korrektur der KUB-Theorie. Die Änderung der KUB-Theorie erfolgt zwar in der richtigen Richtung, aber eine Übereinstimmung mit den Experimenten konnte nicht erzielt werden. Nun bewirkt die Fermifunktion $F(Z, E)$ eine beträchtliche

[6] STARFELT, N., and N.L. SVANTESSON: Phys. Rev. **97**, 708 (1955).
[7] LANGEVIN-JOLIOT, H.: Diss. Paris 1956.
[8] NILSSON, S.B.: Arkiv Fysik **10**, 467 (1956).
[9] LEWIS, R.R., and G.W. FORD: Phys. Rev. **107**, 756 (1957).

Änderung des β-Spektrums $P(E)$, aber da man bei der inneren Bremsstrahlung an der „Zahl der Photonen pro β-Zerfall" interessiert ist, muß man

$$\int_1^{E_0-k} P(E)\,\Phi(E,k)\,dE \Big/ \int_1^{E_0} P(E)\,dE \tag{4}$$

bilden, und dabei heben sich die Coulomb-Korrekturen, die bei dieser Methode in Zähler und Nenner an $P(E)$ angebracht werden, größtenteils weg.

Mit Hilfe von Greenschen Funktionen haben SPRUCH und GOLD[10] 1959 und VINH MAU[11] 1960 versucht, das Coulombfeld besser zu berücksichtigen. Aber auch mit dieser Methode muß man entweder gewisse Annahmen und Näherungen machen (SPRUCH und GOLD behandeln die Elektronen in einer nichtrelativistischen Näherung) oder die Theorie wird sehr aufwendig und kompliziert.

In dieser Arbeit soll nun versucht werden, mit relativ einfachen Mitteln das Coulombfeld auch in den Zwischenzuständen $|i\rangle$ der Übergangswahrscheinlichkeit (1) zu berücksichtigen. Man muß dabei von der Bornschen Näherung abgehen, hat aber den Vorteil, nur Störungsrechnung 2. Ordnung betreiben zu müssen, wenn man für den Anfangszustand $|0\rangle$, die Zwischenzustände $|i\rangle$ und den Endzustand $|f\rangle$ Lösungen im Coulombfeld verwendet. Die exakten Lösungen der Dirac-Gleichung mit Coulombfeld sind hypergeometrische Funktionen, aber beim erlaubten β-Zerfall reicht die Kenntnis der Wellenfunktionen am Kernort, d.h. am Ursprung des Koordinatensystems, und da lassen sie sich leicht angeben.

Nach Berücksichtigung des Coulombfeld-Einflusses auf die Zwischenzustände $|i\rangle$ ist zu erwarten, daß das Spektrum der inneren Bremsstrahlung nun gegenüber der KUB-Theorie stärker verändert ist, da für diesen Einfluß ein „Sichwegheben" in (4) nicht mehr auftreten kann.

II. Berechnung von Spektrum und Polarisation der inneren Bremsstrahlung

Wir befassen uns mit dem Prozeß der Aussendung eines γ-Quants neben dem beim β-Zerfall auftretenden Elektron-Antineutrino-Paar.

Die Übergangswahrscheinlichkeit vom Anfangszustand $|0\rangle$ (Kern mit Ordnungszahl Z) zum Endzustand $|f\rangle$ (Kern mit Ordnungszahl $Z+1$, Elektron*, Antineutrino, γ-Quant) ist durch die „Goldene Regel der Quantenmechanik" gegeben.

$$w = 2\pi \mathbf{S} |\mathfrak{M}|^2 \delta(E_0 - E - k - q)\,, \tag{5}$$

* Wir beschränken uns auf β^--Zerfall.

[10] SPRUCH, L., and W. GOLD: Phys. Rev. **113**, 1060 (1959).

[11] VINH MAU, R.: Diss. Paris 1960.

dabei ist E_0 die Grenzenergie des β-Zerfalls und E, k, q sind die Energien von Elektron, γ-Quant und Antineutrino. S bedeutet Mittelung über die unbekannten Eigenschaften des Anfangszustandes und Summation bzw. Integration über die nicht beobachteten Größen des Endzustandes.

$\mathfrak{M}$ ist das Matrixelement der inneren Bremsstrahlung:

$$\mathfrak{M} = \sum_i \frac{\langle f|H_\gamma|i\rangle\langle i|H_\beta|0\rangle}{E_0 - E_i}. \tag{6}$$

Es wird über die möglichen Zwischenzustände summiert.

Unsere Aufgabe ist es nun, $\mathfrak{M}$ zu berechnen. Zuerst betrachten wir die beteiligten Wechselwirkungen:

1. Die schwache Wechselwirkung. Man weiß aus zahlreichen Experimenten, daß beim β-Zerfall $(V-\lambda A)$ Wechselwirkung vorliegt. Wenn nur erlaubte Übergänge betrachtet werden, findet man

$$\left.\begin{aligned}\langle i|H_\beta|0\rangle = \frac{g}{\sqrt{2}}\,[M_F(u(\boldsymbol{p}'),(1+\gamma_5)\,u(\boldsymbol{q})) - \\ - \lambda \boldsymbol{M}_{GT}\cdot(u(\boldsymbol{p}'),\boldsymbol{\sigma}(1+\gamma_5)\,u(\boldsymbol{q}))],\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

dabei ist g die Kopplungskonstante des β-Zerfalls; M_F und $\boldsymbol{M}_{GT}$ sind Kernmatrixelemente für Fermi- und Gamow-Teller-Übergänge. $u(\boldsymbol{p}')$, $u(\boldsymbol{q})$ sind Dirac-Spinoren für das Elektron (abhängig vom Elektronenimpuls $\boldsymbol{p}'$) bzw. für das Antineutrino (abhängig von dessen Impuls $\boldsymbol{q}$). Die Kernausdehnung wird vernachlässigt, d.h. die Leptonen-Wellenfunktionen werden durch ihren Wert am Kernort $(r=0)$ repräsentiert. Für die Spinoren der Elektronen $u(\boldsymbol{p}')$ sind deshalb Lösungen der Dirac-Gleichung mit Coulombfeld am Kernort zu nehmen.

Da in (6) über alle möglichen Zwischenzustände zu summieren ist, benötigen wir die Spinoren $u(\boldsymbol{p}')$ sowohl für positive als auch für negative Energiezustände.

Nach Jackson, Treiman und Wyld[12] schreiben wir

$$u(\boldsymbol{p}') = N\sqrt{\frac{E'+1}{2E'}}\begin{pmatrix}\chi\\ M\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}'}{E'+1}\chi\end{pmatrix} \quad \text{für} \quad W' = +E' = +\sqrt{p'^2+1}; \tag{8}$$

$$u(\boldsymbol{p}') = N^*\sqrt{\frac{E'+1}{2E'}}\begin{pmatrix}-M^*\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}'}{E'+1}\chi\\ \chi\end{pmatrix} \quad \text{für} \quad W' = -E' = -\sqrt{p'^2+1}; \tag{9}$$

mit

$$M = \frac{E'+1}{E'+\gamma}\left(1 + i\frac{\alpha Z}{p'}\right); \quad \gamma = \sqrt{1-(\alpha Z)^2}; \quad |N|^2 = \frac{E'+\gamma}{E'+1}F(Z,W'), \tag{10}$$

wobei $\alpha = \frac{1}{137}$ die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante und $F(Z,E)$ die Fermifunktion ist.

[12] Jackson, J.D., S.B. Treiman and H.W. Wyld: Z. Physik **150**, 640 (1958).

2. Die elektromagnetische Wechselwirkung. Bei der Beschreibung des elektromagnetischen Feldes verwenden wir Coulomb-Eichung, dann ist das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ divergenzfrei.

$$\boldsymbol{A} = \sqrt{\frac{2\pi}{k}}\, \boldsymbol{e}_\lambda\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{11}$$

$\boldsymbol{k}$ steht für den Impuls und $\boldsymbol{e}_\lambda$ für die Polarisation des Feldes. Die Wechselwirkung eines geladenen Dirac-Teilchens mit dem elektromagnetischen Feld ist

$$H_\gamma = e\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{A}; \tag{12}$$

in unseren Einheiten ist $e^2 = \frac{1}{137} = \alpha$, die Feinstrukturkonstante. Damit ergibt sich

$$\langle f|\, H_\gamma\,|\, i\rangle = \sqrt{\frac{2\pi\alpha}{k}}\, (u(\boldsymbol{p}),\, \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{e}_\lambda\, u(\boldsymbol{p}'))\, (2\pi)^3\, \delta(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}'), \tag{13}$$

wobei für die Dirac-Teilchen ebene Wellen mit durch (8) bzw. (9) gegebenen Amplituden angenommen wurden. Das ist eine wesentliche Näherung, die in dieser Arbeit gemacht wird. Es wird dabei angenommen, daß die γ-Aussendung in Kernnähe, aber ohne Beteiligung der Nukleonen passiert.

3. Summation über die Zwischenzustände. Die Summation über alle Zwischenzustände in (6) bezieht sich auf Elektronenzustände mit dem Impuls $\boldsymbol{p}'$

$$\sum_{\substack{\text{Zwischen-}\\ \text{zustände}}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\boldsymbol{p}' \sum_{\eta=1}^{4},$$

wobei η die zu jedem festen Impuls $\boldsymbol{p}'$ gehörenden Energie- und Spinzustände charakterisiert.

Wegen der δ-Funktion in (13) trägt nur ein Impuls

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{k} \tag{14}$$

zum Zwischenzustand bei. Von jetzt ab ist $\boldsymbol{p}'$ keine selbständige Größe mehr, es steht nur noch als Abkürzung für $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}$. Für das Matrixelement (6) erhält man

$$\mathfrak{M} = g \sqrt{\frac{\pi\alpha}{k}} \sum_{\eta=1}^{4} \frac{(u(\boldsymbol{p}),\, \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{e}_\lambda\, u^{(\eta)}(\boldsymbol{p}'))\, (u^{(\eta)}(\boldsymbol{p}'),\, [M_F - \lambda \boldsymbol{M}_{GT}\cdot\boldsymbol{\sigma}]\,(1+\gamma_5)\, u(\boldsymbol{q}))}{E_0 - q - W_\eta'} \tag{15}$$

W_η' ist die zu $u^{(\eta)}$ gehörige Energie,

$W_\eta' = +E'$ für $\eta = 1,2$; $W_\eta' = -E'$ für $\eta = 3,4$.

Wir summieren getrennt über die Zwischenzustände mit positiver und negativer Energie.

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{M} = g\sqrt{\frac{\pi\alpha}{k}}\, u^{+}(\boldsymbol{p})\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{e}_{\lambda}\left[\sum_{\eta=1,2}\frac{u^{(\eta)}(\boldsymbol{p}')\,u^{(\eta)+}(\boldsymbol{p}')}{E_0-q-E'}+\sum_{\eta=3,4}\frac{u^{(\eta)}(\boldsymbol{p}')\,u^{(\eta)+}(\boldsymbol{p}')}{E_0-q+E'}\right]\times\\ \times\,(M_F-\lambda\,\boldsymbol{M}_{GT}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,(1+\gamma_5)\,u(\boldsymbol{q})\,.\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

Die Spinsummationen in (16) liefern Casimir-Operatoren.

Für Zustände mit positiver Energie:

$$\mathsf{P}_{+}(\boldsymbol{p}')=\sum_{\eta=1,2}u^{(\eta)}(\boldsymbol{p}')\,u^{(\eta)+}(\boldsymbol{p}')=\frac{1}{2}F(Z,E')\left[1+\frac{\Omega}{E'}\right]\tag{17}$$

und für Zustände mit negativer Energie:

$$\mathsf{P}_{-}(\boldsymbol{p}')=\sum_{\eta=3,4}u^{(\eta)}(\boldsymbol{p}')\,u^{(\eta)+}(\boldsymbol{p}')=\frac{1}{2}F(Z,-E')\left[1-\frac{\Omega}{E'}\right]\tag{18}$$

mit

$$\Omega=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}'+\gamma\beta+i\,(\alpha Z)\,\beta\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}'\,.\tag{19}$$

$\hat{\boldsymbol{p}}'=\boldsymbol{p}'/p'$ ist der Einheitsvektor in Richtung $\boldsymbol{p}'$.

Wir wollen uns auf Glieder linear in (αZ) beschränken und schreiben

$$\left.\begin{aligned}F(Z,E')&\approx 1+\pi\,(\alpha Z)\,\frac{E'}{p'}\\ F(Z,-E')&\approx 1-\pi\,(\alpha Z)\,\frac{E'}{p'}\,.\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

Als Summe über die Zwischenzustände in (15) ergibt sich so

$$D(\boldsymbol{p}')=\sum_{\eta=1}^{4}\frac{u^{(\eta)}(\boldsymbol{p}')\,u^{(\eta)+}(\boldsymbol{p}')}{W-W'_{\eta}}=\frac{\widetilde{W}+\widetilde{\Omega}}{W^2-E'^2}\,.\tag{21}$$

$W=E_0-q$ ist die für Elektron und Bremsstrahlquant zur Verfügung stehende Energie. $\widetilde{W}$ und $\widetilde{\Omega}$ stehen für die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{W}&=W+\pi\,(\alpha Z)\,\frac{E'^2}{p'}\\ \widetilde{\Omega}&=\Omega\left(1+\pi\,(\alpha Z)\,\frac{W}{p'}\right).\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

Das Matrixelement wird dann

$$\mathfrak{M}=g\sqrt{\frac{\pi\alpha}{k}}\,u^{+}(\boldsymbol{p})\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{e}_{\lambda}\,D(\boldsymbol{p}')\,(M_F-\lambda\,\boldsymbol{M}_{GT}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,(1+\gamma_5)\,u(\boldsymbol{q})\,.\tag{23}$$

4. Die Übergangswahrscheinlichkeit. Zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit muß das in (23) gefundene Matrixelement $\mathfrak{M}$ quadriert und über die nicht beobachteten Größen aufsummiert werden.

Nicht beobachtet werden: a) die Kerngrößen in Anfangs- und Endzustand, soweit sie nicht durch das betrachtete Element festgelegt sind. Sie sind in den Kernmatrixelementen M_F und $\boldsymbol{M}_{GT}$ enthalten.

b) Spin und Impuls von Elektron und Antineutrino im Endzustand.

c) Die Richtung des γ-Quants im Endzustand.

Gemessen wird die Energie und die Polarisation des γ-Quants. Die Wahrscheinlichkeit für die Aussendung eines γ-Quants mit der Energie k und der Polarisation $\boldsymbol{e}_\lambda$ pro Energieeinheit und pro Zeiteinheit ist dann

$$S(k, \boldsymbol{e}_\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int k^2 d\Omega_k \, d\boldsymbol{p} \, d\boldsymbol{q} \, \delta(E_0 - E - k - q) \sum_{\substack{\text{Spins} \\ \text{Kernzustände}}} |\mathfrak{M}(k, \boldsymbol{e}_\lambda)|^2. \tag{24}$$

Die Spinsummation über das quadrierte Matrixelement (23) liefert einen Spurausdruck

$$\sum_{\text{Spins}} |\mathfrak{M}(k, \boldsymbol{e}_\lambda)|^2 = g^2 \left(\frac{\pi\alpha}{k}\right) \text{SPUR}\, \Gamma, \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned} \Gamma = \sum_{\text{Kernzustände}} (\mathsf{P}^e_+(\boldsymbol{p})\, \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{e}_\lambda\, D(\boldsymbol{p}')\, (M_F - \lambda \boldsymbol{M}_{GT}\cdot\boldsymbol{\sigma})\, (1+\gamma_5) \times \\ \times \mathsf{P}^{\bar\nu}_+(\boldsymbol{q})\, (1+\gamma_5)\, (M_F^* - \lambda \boldsymbol{M}^*_{GT}\cdot\boldsymbol{\sigma})\, D(\boldsymbol{p}')\, \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{e}^*_\lambda) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

mit den Projektionsoperatoren für das Elektron

$$\mathsf{P}^e_+(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2} F(Z,E) \left\{1 + \frac{1}{E} (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \gamma\beta + i(\alpha Z)\, \beta\, \boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})\right\} \tag{27}$$

und für das Antineutrino

$$\mathsf{P}^{\bar\nu}_+(\boldsymbol{q}) = \tfrac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{q}}). \tag{28}$$

Die Integration über die Neutrinoimpulse liefert wegen der δ-Funktion

$$\int \mathsf{P}^{\bar\nu}_+(\boldsymbol{q})\, \delta(E_0 - E - k - q)\, d\boldsymbol{q} = 2\pi (E_0 - E - k)^2. \tag{29}$$

Da die Kerne nicht ausgerichtet sind, gilt für die Kernmatrixelemente

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\text{Kernzustände}} (M_F - \lambda \boldsymbol{M}_{GT}\cdot\boldsymbol{\sigma})\, (1+\gamma_5)\, (M_F^* - \lambda \boldsymbol{M}^*_{GT}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \\ = (1+\gamma_5)\, (|M_F|^2 + \lambda^2 |\boldsymbol{M}_{GT}|^2) \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

und wir können schreiben

$$\text{SPUR}\, \Gamma = 2\, (|M_F|^2 + \lambda^2 |\boldsymbol{M}_{GT}|^2)\, T \tag{31}$$

$$T = \text{SPUR}\, \{\mathsf{P}^e_+(\boldsymbol{p})\, \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{e}_\lambda\, D(\boldsymbol{p}')\, (1+\gamma_5)\, D(\boldsymbol{p}')\, \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{e}^*_\lambda\}. \tag{32}$$

Diese Spur läßt sich berechnen als Funktion von Elektronenimpuls $\boldsymbol{p}$ und Impuls des γ-Quants $\boldsymbol{k}$. Da noch die Integrationen über alle Impulse $\boldsymbol{p}$ und alle Richtungen $\boldsymbol{k}$ auszuführen sind, führen wir den Winkel ϑ

zwischen $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{k}$ ein

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}=p\,k\cos\vartheta \tag{33}$$

und brauchen dann nur noch über die Elektronenenergie $E=+\sqrt{p^2+1}$ und den Winkel ϑ zu integrieren.

$$\frac{1}{(2\pi)^8}\int k^2\,d\Omega_k\,d\boldsymbol{p}=\frac{2}{(2\pi)^6}\int k^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,pE\,dE; \tag{34}$$

also:

$$S(k,\boldsymbol{e}_\lambda)=\frac{g^2}{(2\pi)^3}\left(|M_F|^2+\lambda^2|\boldsymbol{M}_{GT}|^2\right)\int_1^{E_0-k}\int_0^{\pi}S(E,k,\boldsymbol{e}_\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta\,dE \tag{35}$$

$$S(E,k,\boldsymbol{e}_\lambda,\vartheta)=\left(\frac{\alpha}{k\pi}\right)(E_0-E-k)^2k^2pE\,T. \tag{36}$$

5. Spektrum und Polarisation. Die $\boldsymbol{e}_\lambda$ charakterisieren die Polarisation der ausgesandten γ-Quanten.

Wir wollen die zirkulare Polarisation der γ-Quanten untersuchen und setzen für die $\boldsymbol{e}_\lambda$:

$$\boldsymbol{e}_\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1\pm i\,\boldsymbol{e}_2). \tag{37}$$

Wenn $\boldsymbol{e}_1$ und $\boldsymbol{e}_2$ mit $\boldsymbol{k}$ ein rechtshändiges Dreibein bilden

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\hat{\boldsymbol{k}}, \tag{38}$$

dann beschreiben $\boldsymbol{e}_+$ rechtszirkular und $\boldsymbol{e}_-$ linkszirkular polarisierte Strahlung.

Für die $\boldsymbol{e}_\lambda$ gelten die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{e}_\lambda\cdot\boldsymbol{e}_\lambda^*&=1;\\ \boldsymbol{e}_\lambda\times\boldsymbol{e}_\lambda^*&=-i\,\mathscr{P}_\lambda\,\hat{\boldsymbol{k}};\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

mit $\mathscr{P}_+=+1$ (rechtszirkular polarisierte Strahlung)
und $\mathscr{P}_-=-1$ (linkszirkular polarisierte Strahlung).

Ausrechnen der Spur in (36) liefert

$$\left.\begin{aligned}S(E,k,\boldsymbol{e}_\lambda,\vartheta)&=\left(\frac{\alpha}{k\pi}\right)(E_0-E-k)^2\times\\ \times&\left\{\frac{A_0+\pi\alpha Z\left(A_1+\frac{A_2}{p'}\right)}{E-p\cos\vartheta}-\left[B_0+\pi\alpha Z\left(B_1+\frac{B_2}{p'}\right)\right]\left[1+\frac{1}{(E-p\cos\vartheta)^2}\right]\right\}p.\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

A_0 und B_0 stehen für den Haupanteil, ohne Berücksichtigung der Coulomb-Effekte (KUB-Theorie [2,3])

$$A_0=2\left(E+k\left(\frac{1+\mathscr{P}_\lambda}{2}\right)\right)^2,\quad B_0=E+k\,(1+\mathscr{P}_\lambda). \tag{41}$$

A_1 und B_1 beschreiben die Coulomb-Korrekturen am Endzustand (Coulomb-Korrekturen in Bornscher Näherung, LEWIS und FORD[9], NILSSON[8])

$$A_1 = \frac{E}{p} A_0, \quad B_1 = \frac{E}{p} B_0. \tag{42}$$

A_2 und B_2 schließlich kommen von den Coulomb-Korrekturen am Zwischenzustand

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= [2E + k(1 + \mathscr{P}_\lambda)]\, E'^2 + [2E^2 + E k (1 + 3\mathscr{P}_\lambda) + \\ &\quad + k^2 (1 + \mathscr{P}_\lambda)]\, (E + k), \\ B_2 &= E'^2 + [E + k(1 + 2\mathscr{P}_\lambda)]\, (E + k). \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

E'^2 und p' lassen sich aus (14) bestimmen

$$p' = +\sqrt{p^2 + k^2 + 2kp\cos\vartheta}; \qquad E'^2 = p'^2 + 1; \tag{44}$$

die Integration über den Winkel ϑ liefert

$$\left.\begin{aligned} S(k, \boldsymbol{e}_\lambda) = \frac{g^2}{(2\pi)^3}\left(\frac{2\alpha}{k\pi}\right)\left(|\boldsymbol{M}_F|^2 + \lambda^2 |\boldsymbol{M}_{GT}|^2\right) \int_1^{E_0 - k} (E_0 - E - k)^2 \times \\ \times [I_0 + \pi\alpha Z (I_1 + I_2)]\, dE. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

wieder aufgeteilt nach KUB-Anteil I_0, Coulomb-Korrekturen am Endzustand I_1 und an den Zwischenzuständen I_2, mit

$$I_0 = 2\left[E + k\left(\frac{1 + \mathscr{P}_\lambda}{2}\right)\right]^2 \ln(E + p) - 2p\,[E + k(1 + \mathscr{P}_\lambda)], \tag{46}$$

$$I_1 = \frac{E}{p} I_0, \tag{47}$$

$$\left.\begin{aligned} I_2 = 4\left[E + k\left(\frac{1 + \mathscr{P}_\lambda}{2}\right)\right]^2 \frac{W}{\sqrt{W^2 - 1}} \ln\left(\frac{p + k + \sqrt{W^2 - 1}}{|p - k| + \sqrt{W^2 - 1}}(E + p)\right) - \\ - [1 + Wk\mathscr{P}_\lambda] \frac{k}{(W^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \times \\ \times \ln\left(\frac{(p + k)\sqrt{W^2 - 1} + (p + k)^2 + k(E - p)}{|p - k|\sqrt{W^2 - 1} + (p - k)^2 + k(E + p)}(E + p)^2\right) + \\ \frac{1}{3k}\,[2E^2 + k^2(5 + 6\mathscr{P}_\lambda) + 3Ek(3 + \mathscr{P}_\lambda) + 1] \times \\ \times (|p - k| - (p + k)) \frac{p}{3}\,(|p - k| + (p + k)) + \\ + [E + k(1 + \mathscr{P}_\lambda)] \frac{W}{W^2 - 1}\,(|p - k|\,(E - p) - (p + k)\,(E + p)), \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

wobei $W = E + k$ ist.

Für das Spektrum bilden wir

$$S(k) = S(k, \boldsymbol{e}_+) + S(k, \boldsymbol{e}_-) \tag{49}$$

und normieren noch mit der beim β-Zerfall auftretenden Gesamtzahl N der Elektronen pro Zeiteinheit

$$N = \frac{4g^2}{(2\pi)} \left(|M_F|^2 + \lambda^2 |\boldsymbol{M}_{GT}|^2\right) \int_1^{E_0} \left(1 + \pi \alpha Z \frac{E}{p}\right) (E_0 - E)^2 \, pE \, dE \,. \tag{50}$$

Den Polarisationsgrad $\mathfrak{P}(k)$ der inneren Bremsstrahlung definieren wir

$$\mathfrak{P}(k) = \frac{S(k, \boldsymbol{e}_+) - S(k, \boldsymbol{e}_-)}{S(k, \boldsymbol{e}_+) + S(k, \boldsymbol{e}_-)} \,. \tag{51}$$

Das Spektrum $S(k)/N$ und die Polarisation $\mathfrak{P}(k)$ wurden schließlich mit einer elektronischen Rechenmaschine „Siemens 2002" aus den Ausdrücken (45) berechnet.

III. Ergebnisse

Die numerische Berechnung von Spektrum und Polarisation der inneren Bremsstrahlung wurde für die Elemente P^{32}, S^{35} und Y^{90} durchgeführt.

1. Spektrum. Das gefundene Spektrum liefert in allen Fällen eine 1,5- bis 2mal größere Photonenausbeute als die KUB-Theorie.

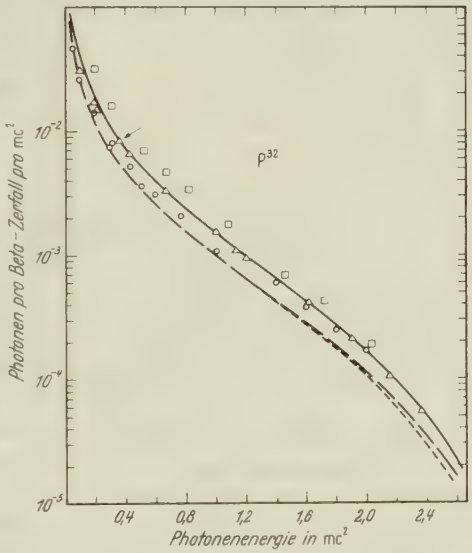


Fig. 1. Spektrum der inneren Bremsstrahlung bei P^{32}. *Theorie:* diese Arbeit ———, KUB-Theorie ·····, Lewis und Ford – – –. *Experiment:* Absolutwerte. Liden und Starfelt o, Langevin-Joliot □. Relativmessungen, bei 180 keV angepaßt. Hakeem und Goodrich △

Phosphor (Fig. 1). Bei P^{32} handelt es sich um einen erlaubten β-Zerfall mit der Grenzenergie $E_0 = 4{,}34\ mc^2$. Die experimentellen Punkte repräsentieren Absolutmessungen von Liden und Starfelt[5] und von Langevin-Joliot[7] sowie Relativmessungen von Hakeem und Goodrich[13], angepaßt bei $0{,}36\ mc^2$. Im hochenergetischen Teil des Spektrums stimmen die absoluten Ausbeuten mit den in dieser Arbeit gefundenen Werten überein. Bei niederen Photonenenergien bestehen große Unterschiede zwischen den experimentellen Werten verschiedener Autoren; die vorliegende Theorie liegt dazwischen. Mit den Relativmessungen

von HAKEEM und GOODRICH, die mit großer Genauigkeit speziell zur Prüfung der Spektrenform gemacht wurden, ist die Form des hier gefundenen Spektrums in guter Übereinstimmung. Man beachte die im Vergleich zur KUB-Theorie schwächere Krümmung bei kleinen Energien, die auch bei allen Messungen vorliegt.

Schwefel (Fig. 2). Bei S^{35} liegt ebenfalls ein erlaubter β-Zerfall mit der sehr niedrigen Grenzenergie von 1,35 mc^2 vor. Das Spektrum stimmt recht gut mit den Absolutmessungen von LANGEVIN-JOLIOT[7] überein. Auch die Absolutmessungen von STARFELT und SVANTESSON[6] bestätigen bei hohen Energien die vorliegende Theorie. Bei niedrigen Energien liegen diese Messungen allerdings tiefer.

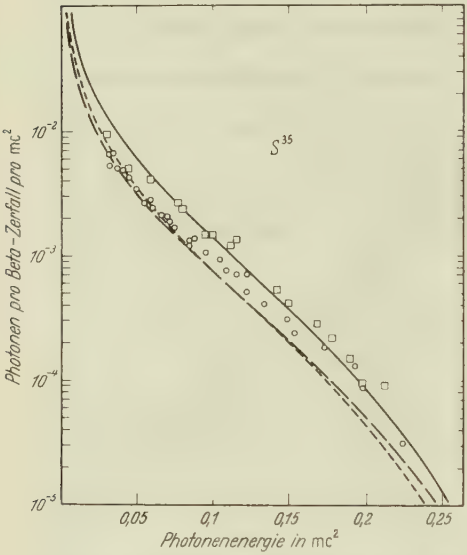


Fig. 2. Spektrum der inneren Bremsstrahlung bei S^{35}. *Theorie:* diese Arbeit ——, KUB-Theorie ·····, LEWIS und FORD — — —. *Experiment:* Absolutwerte. STARFELT und SVANTESSON o, LANGEVIN-JOLIOT □

Yttrium (Fig. 3). Bei Y^{90} liegt ein einfach unique verbotener β-Übergang vor. Grenzenergie $E_0 = 5{,}42\ mc^2$. Spektrum und Polarisation sind mit einer Theorie für erlaubten β-Zerfall berechnet. Eine gewisse Berechtigung für die Anwendung der „erlaubten Theorie" auf den verbotenen Übergang liefert die Arbeit von CHANG und FALKOFF[4], in der in Bornscher Näherung gezeigt wird, daß das Spektrum der inneren Bremsstrahlung durch den Verbotenheitsgrad des β-Zerfalls kaum geändert wird.

Die Form des Spektrums stimmt gut mit den bei 0,64 mc^2 angepaßten Relativmessungen von HAKEEM und GOODRICH[13] und von BIENLEIN und KREISCHE[14]* überein. Absolutmessungen sind nicht bekannt, es bestehen jedoch Anzeichen[15] dafür, daß das Spektrum höher liegt als die KUB-Theorie.

2. Polarisation. Bei der Polarisation (Fig. 4) bringen die Coulomb-Korrekturen kaum eine Änderung gegenüber der KUB-Theorie. Bei

* Diese Werte sind im Bereich hoher Photonenenergien mit einem ziemlich großen Fehler behaftet.

[13] HAKEEM, M. A., and M. GOODRICH: Nuclear Phys. **31**, 322 (1962).

[14] BIENLEIN, H., u. W. KREISCHE: Phys. Verh. **11**, 61 (1960).

[15] BIENLEIN, H., u. W. KREISCHE: Private Mitteilung.

P^{32} und Y^{90} stimmen die Rechnungen hier, ebenso wie die frühere Theorie von PYTTE[16] mit den Messungen von GALSTER und SCHOPPER[17,18] überein.

Nur bei S^{35} erscheint die Polarisation gegenüber der Theorie von LEWIS und FORD und auch gegenüber der KUB-Theorie etwas erniedrigt. Messungen der Polarisation beim Schwefel sind nicht bekannt.

Während es zeitweise schien, als ob Coulomb-Korrekturen nicht in der Lage sind, die beim Spektrum vorliegenden Diskrepanzen zwischen Theorie und Experiment zu erklären, zeigen die Rechnungen, daß Coulomb-Korrekturen sehr wohl weitgehende Übereinstimmung von Theorie und Experiment bewirken können. Es ergibt sich, daß die Berücksichtigung des Coulomb-

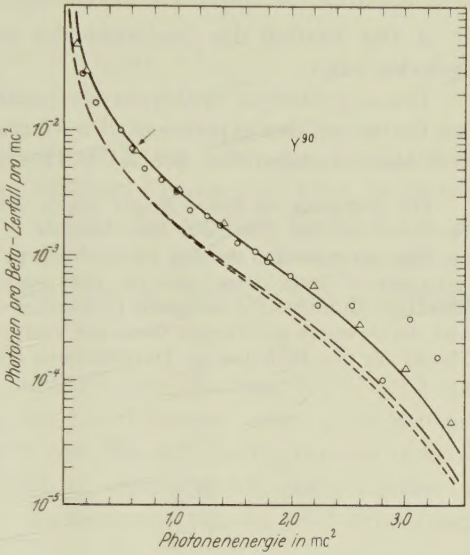


Fig. 3. Spektrum der inneren Bremsstrahlung bei Y^{90}. *Theorie* (für erlaubten β-Zerfall): diese Arbeit ———, KUB-Theorie --------, LEWIS und FORD — — —. *Experiment:* Relativmessungen, bei 330 keV angepaßt. BIENLEIN und KREISCHE o, HAKEEM und GOODRICH △

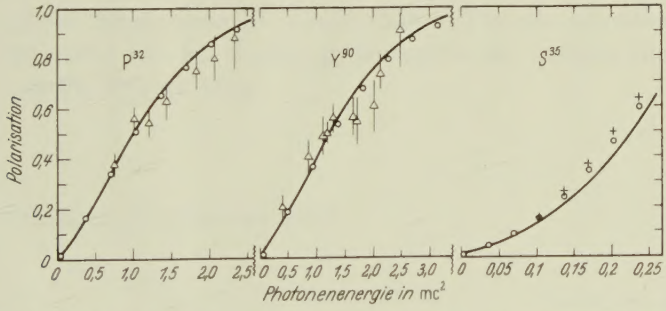


Fig. 4. Polarisation bei der inneren Bremsstrahlung von P^{32}, S^{35} und Y^{90}. *Theorie:* diese Arbeit ———, KUB-Theorie o, LEWIS und FORD +. *Experiment:* GALSTER und SCHOPPER △

feld-Einflusses auf die Zwischenzustände von wesentlicher Bedeutung ist. In der vorliegenden Arbeit wurde dieser Einfluß mit folgenden

[16] PYTTE, A.: Phys. Rev. **107**, 1681 (1957).
[17] GALSTER, S., and H. SCHOPPER: Phys. Rev. Letters **4**, 295 (1960).
[18] GALSTER, S.: Z. Physik **161**, 46 (1961).

Näherungen berechnet: 1. Die Elektronen-Wellenfunktionen wurden für Zwischen- und Endzustand als ebene Wellen mit durch das Coulombfeld modifizierter Amplitude angenommen.

2. Der Einfluß des Coulombfeldes wurde bis zur 1. Ordnung in αZ berücksichtigt.

Das so gefundene Spektrum der inneren Bremsstrahlung stimmt dort am besten mit den experimentellen Werten überein, wo letztere die größten Abweichungen von der KUB-Theorie zeigen.

Die Anregung zu dieser Arbeit bekam ich in einer Unterhaltung mit HANS BIENLEIN, ich bin ihm dafür sehr dankbar.

Besonders danken möchte ich auch Herrn Professor VOLZ für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit und für viele wertvolle Ratschläge, HORST WEGENER und HANS BIENLEIN für anregende Diskussionen, der Firma Siemens für die Rechenzeit, die sie mir in großzügiger Weise zur Verfügung gestellt hat und Fäulein GUNDA HECHT für ihre Hilfe bei der Durchführung der Rechnungen.

Lebenslauf

Am 22. Oktober 1934 wurde ich als Sohn des Prokuristen Hans Felsner und seiner Ehefrau Emma, geb. Fink, in Nürnberg geboren. Nach fünf Jahren Volksschule besuchte ich ab 1946 die Oberschule. Im Juni 1954 erhielt ich von der Oberrealschule an der Löbleinstraße in Nürnberg das Reifezeugnis.

Im November 1954 begann ich das Studium der Physik an der Universität Erlangen. Im Wintersemester 1955/56 und im Sommersemester 1956 besuchte ich die Universität Göttingen. Von November 1956 an studierte ich dann wieder in Erlangen und legte hier im Februar 1959 die Diplomprüfung ab.

Von der Deutschen Forschungsgemeinschaft erhielt ich ein Ausbildungsstipendium und konnte vom 1. Februar 1960 bis 31. April 1961 am Oak Ridge National Laboratory in USA meine Kenntnisse in Theoretischer Physik erweitern. Seit Mai 1961 bin ich wieder in Erlangen am Institut für Theoretische Physik tätig.

Erlangen, im Februar 1963

Gerhard Felsner